



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra 07-2

Nota: Este examen consta de 6 preguntas de 3 puntos cada una. La nota del examen se calcula mediante la fórmula $N_{\text{ex}} = \frac{P}{3} + 1.0$, donde P es el puntaje obtenido.

Examen

Profesores: Alejandro Maass, Leonardo Sánchez

- P1.** (3 pts.) Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en \mathbb{N} . Se define la relación Ω en \mathbb{N}/\mathcal{R} (conjunto cociente de \mathcal{R}) por:

$$[x]_{\mathcal{R}} \Omega [y]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \min[x]_{\mathcal{R}} \leq \min[y]_{\mathcal{R}}.$$

Probar que Ω es relación de orden. ¿Es orden total?

- P2.** (a) (1 pto.) Si $a \neq b$ y $p \in \mathbb{R}[x]$ es divisible por $(x - a)$ y por $(x - b)$, pruebe que $p(x)$ es divisible por $(x - a)(x - b)$.
(b) (2 pts.) Si el polinomio $x^4 + px^3 + qx^2 - 18x - 12$ se divide por $(x + 1)(x + 3)$, el resto es $R(x) = 2x + 3$. Determine p y q .

- P3.** Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

- (a) (2 pts.) Probar por inducción que $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(b) (1 pto.) Use la desigualdad anterior (a) para demostrar que

$$\sum_{k=0}^n a_k < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- P4.** (3 pts.) Considere las funciones $f: E \rightarrow F$ y $g: F \rightarrow E$ tales que $g \circ f = \text{id}_E$. Demuestre que f es inyectiva y g es sobreyectiva.

- P5.** Se define en \mathbb{R} la l.c.i. $*$ por $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Se pide:

- (a) (2.5 pts.) Probar que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.
Indicación: \cdot es el producto habitual y puede usar todas las propiedades conocidas en \mathbb{R} para \cdot .
(b) (0.5 pts.) Demuestre que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

- P6.** (a) (1.5 pts.) Determinar la parte real e imaginaria del complejo $\frac{(1+i)^5}{(i-1)^6}$.

- (b) (1.5 pts.) Resolver en \mathbb{C} la ecuación $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$, indicando la multiplicidad de cada raíz.

Tiempo: 3 horas
01 de diciembre de 2007